Normal Dağılım

Normal dağılım hem uygulamalı hem de teorik istatistikte kullanılan oldukça önemli bir dağılımdır. Normal dağılımın istatistikte önemli bir yerinin olmasının nedeni birçok gözlem sonucunun çan şeklinde bir dağılım vermesi ve çoğu dağılımın denek sayısı arttıkça normal dağılıma yaklaşmasıdır.

X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

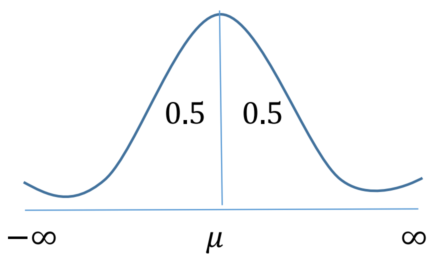
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} & , -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0 \\ 0, & dd \end{cases}$$

biçiminde olduğunda X rastgele değişkenine Normal dağılıma sahiptir denir ve X~N(μ, σ^2) şeklinde gösterilir. μ ve σ^2 ise dağılımın parametreleridir. $\pi = 3{,}14$ ve e=2,71825 dir.

Normal dağılımın özellikleri:

a) Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun yani f(x) in altında kalan alan 1'dir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

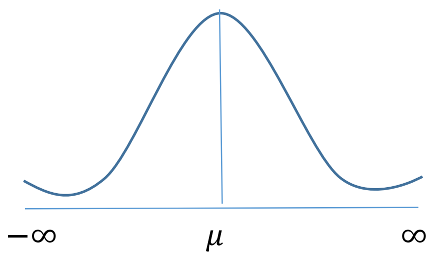


b) Normal dağılım ortalamaya göre simetriktir. Yani

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)dx = \int_{\mu}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

dir.

c) Normal dağılım çan şeklinde bir dağılımdır.



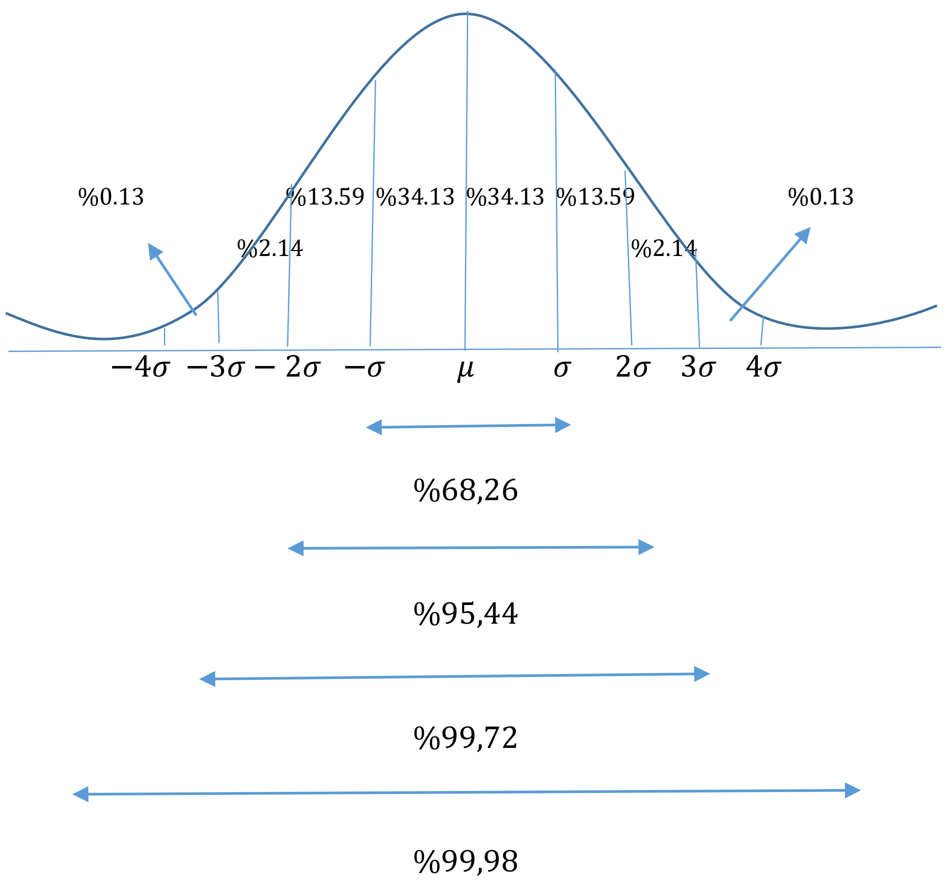
d) Normal dağılıma sahip bir rastgele değişkenin aritmetik ortalaması, medyanı (ortancası) ve modu (tepe değeri) birbirine eşittir.

$$\text{Ortalama}=\text{Mod}=\text{Medyan}=\mu$$

e) Deneklerin

%68.26'sı	$\mu \pm 1\sigma$
%95.44'ü	$\mu \pm 2\sigma$
%99.72'si	$\mu \pm 3\sigma$
%99.98'i	$\mu \pm 4\sigma$

sınırları içindedir.



f) X rastgele değişkeni Normal dağılıma sahip ise X 'in dağılım fonksiyonu

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

olarak tanımlanır. Bu fonksiyon X rastgele değişkeninin belli bir x değerinden küçük ya da eşit olma olasılıklarını verir.

g) $\mu = 0 \; ve \; \sigma^2 = 1$ olan Normal dağılıma Standart Normal dağılım denir. Standart normal dağılıma sahip bir rastgele değişken genellikle "Z" harfi ile gösterilir. Z~N(0,1) ise Z rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad , -\infty < z < \infty$$

şeklindedir.

h) X~N(μ, σ^2) dağılımına sahip bir rastgele değişken olmak üzere $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ rastgele değişkeni standart normal dağılıma sahip bir rastgele değişken olur. Bu durumda

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(Z) = P(Z \leq z)$$

dir. Buna standartlaştırma işlemi denir. Simetri özelliğinden

$$\Phi(-Z) = 1 - \Phi(Z)$$

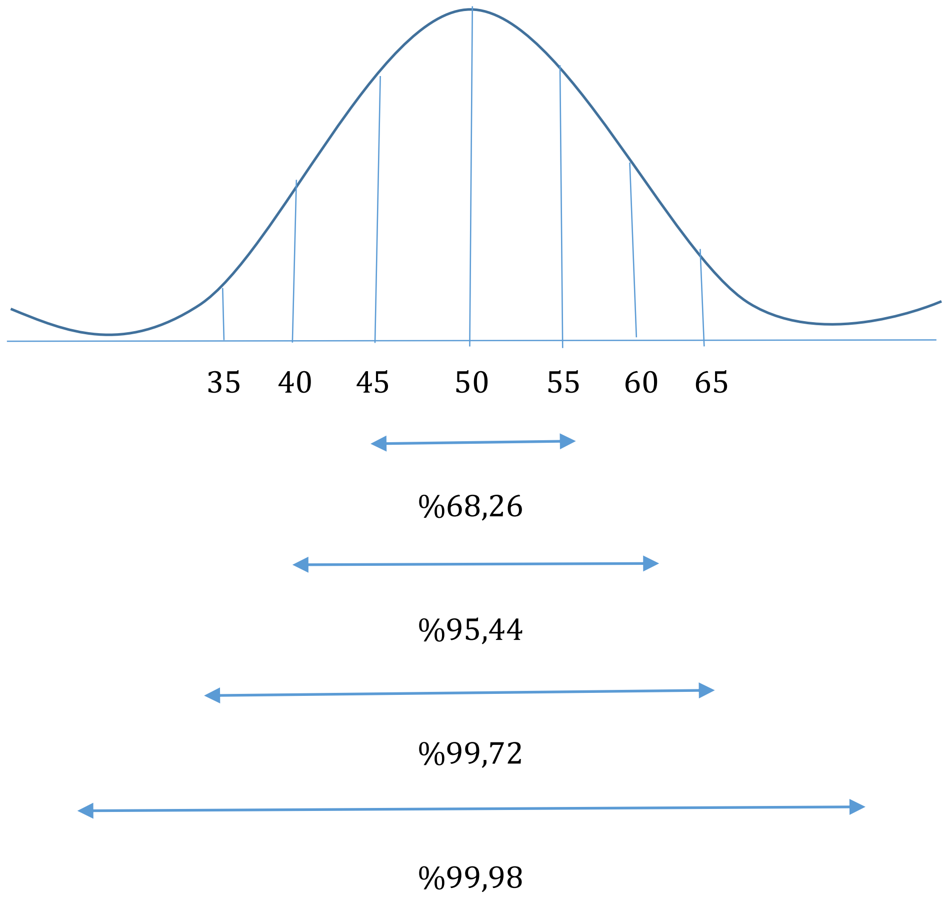
olur. Standart normal dağılım için dağılım fonksiyonundan bulunan olasılıkları veren tablolar düzenlenmiştir. Bu tablolar kullanılarak belli bir Z değerine karşılık gelen olasılık bulunabildiği gibi belli bir olasılığa karşılık gelen Z değeri de bulunabilir.

Örnek:

Harita mühendisliği bölümünde Olasılık ve İstatistik dersini alan öğrencilerin ara sınav not ortalaması $\mu = 50$ ve varyansı $\sigma^2 = 25$ olan Normal dağılıma sahip olduğu bilinmektedir.

a) Bu dersi alan bir öğrencinin 40 'ın altında not alması olasılığı kaçtır?
b) Bu dersi alan bir öğrencinin 45 'in üzerinde not alması olasılığı kaçtır?
c) Bu dersi alan bir öğrencinin 45 ile 55 arasında not alması olasılığı nedir?
d) Bu dersi alan bir öğrencinin 55 ile 65 arasında not alması olasılığı nedir?

Çözüm: Sözü edilen problemdeki öğrenciler için Normal dağılım eğrisi aşağıdaki gibidir.



a) Bu dersi alan bir öğrencinin 40 ‘ın altında not alması olasılığı %2.14+%0.13=%2.27 dir.

b) Bu dersi alan bir öğrencinin 45 ‘in üzerinde not alması olasılığı %34.13+%34.13+%13.59+%13.59+%2.14+%0.13=%84.12 dir.

c) Bu dersi alan bir öğrencinin 45 ile 55 arasında not alması olasılığı %68.26 dır.

d) Bu dersi alan bir öğrencinin 55 ile 65 arasında not alması olasılığı %13.59+%2.14=%15.73 dür.

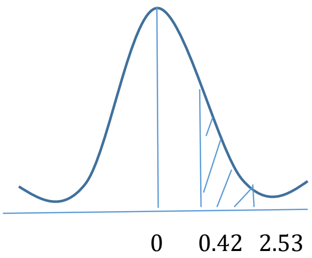
Örnek:

$Z \sim N(0,1)$ için aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

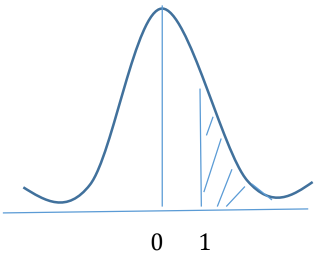
a) $P(0.42<Z<2.53)=?$
b) $P(Z>1)=?$
c) $P(-1.56<Z<2.53)=?$

Çözüm:

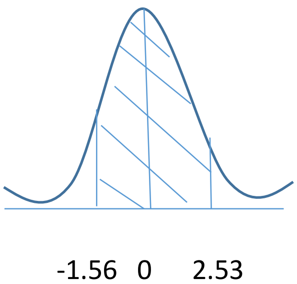
a) P(0.42<Z<2.53)=0.4953-0.1628=0.3315



b) P(Z>1)=0.5-0.3413=0.1587



c) P(-1.56<Z<2.53)=0.4406+0.4943=0.9349



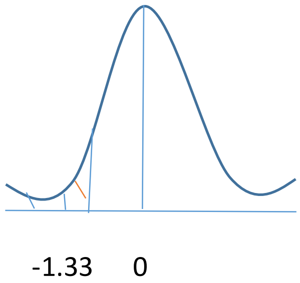
Örnek: Bir hastanede belli bir hastalığa sahip hastaların tansiyonlarının ortalaması 15 ve varyansı 9 olan normal dağılıma sahip oldukları bilinmektedir.

a) Rastgele seçilen bir hastanın tansiyonunun 11' den küçük olma olasılığı nedir?
b) Rastgele seçilen bir hastanın tansiyonunun 12' den büyük olma olasılığı nedir?
c) Rastgele seçilen bir hastanın tansiyonunun 9 ile 16 arasında olması olasılığı nedir?

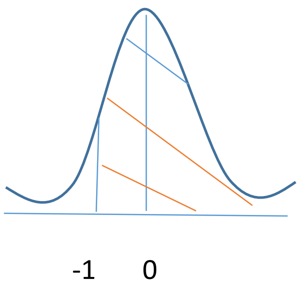
Çözüm:

$$X \sim N(\mu = 15, \sigma^2 = 9)$$

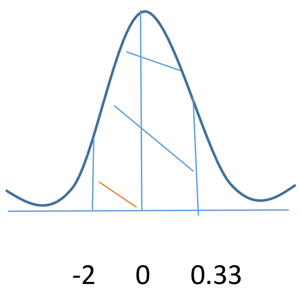
a) $P(X<11)=P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{11-15}{3})=P(Z<-1.33)=0.5-0.4082=0.0918$



b) $P(X>12)=P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{12-15}{3})=P(Z>-1)=0.5+0.3413=0.8413$



c) $P(9<X<16)= P(\frac{9-15}{3} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{16-15}{3})=P(-2<Z<0.33)=0.4772+0.1293=0.6065$



Örnek: Bir yaşındaki çocukların ağırlıklarının ortalaması kg olarak 13, standart sapması 2 olan Normal dağılıma sahip olduğu bilinsin.

a) Rastgele seçilen bir çocuğun ağırlığının 17 kg dan fazla olması olasılığı nedir?
b) Çocukların %25 inin ağırlığı hangi değerin altındadır?
c) Çocukların %30 unun ağırlığı hangi değerin altındadır?
d) Çocukların %80 inin ağırlığı hangi değerin altındadır?
e) Çocukların %15 inin ağırlığı hangi değerin üstündedir?
f) Çocukların %80 inin ağırlığı hangi değerin üstündedir?

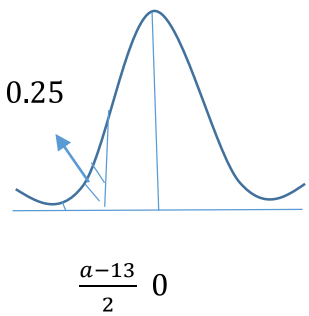
Çözüm: $X \sim N(\mu = 13, \sigma^2 = 4)$

a) $P(X>17)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{17-13}{2})=P(Z>2)=0.5-0.4772=0.0228$

b) $P(X<a)=0.25$ a=?

$P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{a-13}{2})=0.25$

$P(Z<\frac{a-13}{2})=0.25$ $\frac{a-13}{2} = -0.675$ a=11.65

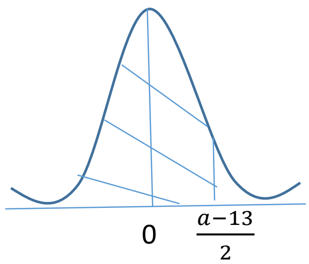


c) Ödev

d) $P(X<a)=0.80$ a=?

$P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{a-13}{2})=0.80$

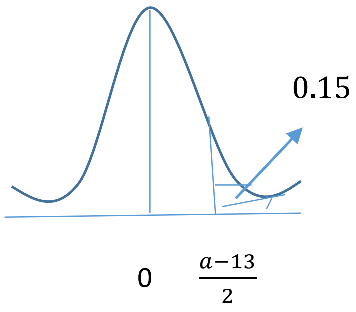
$P(Z<\frac{a-13}{2})=0.80$ $\frac{a-13}{2}=0.84$ a= 14.68



e) $P(X>a)=0.15$ a=?

$P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{a-13}{2})=0.15$

P(Z>$\frac{a-13}{2}$)=0.15 $\qquad$ $\frac{a-13}{2} = 1.04$ $\qquad$ a=15.08



f) P(X>a)=0.80 a=?

P($\frac{X-\mu}{\sigma}$>$\frac{a-13}{2}$)=0.80

P(Z>$\frac{a-13}{2}$)=0.80 $\qquad$ $\frac{a-13}{2} = -0.84$ $\qquad$ a=11.32